APÉNDICE B

EL PROBLEMA DEL PLANIFICADOR SOCIAL

El problema de un planificador social benevolente es asignar trabajo y capital entre ciudades y a lo largo del tiempo, de forma que la utilidad de los individuos es maximizada. Para simplificar notación, se omiten los subíndices de tiempo en la mayoría de las expresiones siguientes:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln(c) dt$$

$$\sum_{j=A,B} N^j = N$$

$$\sum_{j=A,B} I^j + \sum_{j=A,B} g(K^j) + C = \sum_{j=A,B} Y^j$$

$$\dot{K}^j = I^j - \delta K^j, \forall j = A, B$$

$$I^j \geq 0, \forall j = A, B$$

$$K_0^j \text{ dado, } \forall j = A, B$$

donde $Y^j = (N^j)^\alpha (K^j)^\beta$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, y $\alpha + \beta > 1$, para cualquier $j = A, B$. La constante N representa la población nacional, I^j y K^j_0 respectivamente denotan la tasa de inversión y el stock inicial de capital instalado en la ciudad j, $j = A,B$, y $\delta \in (0, 1)$ es la tasa de depreciación del capital. Para solucionar este problema, se procede a dividirlo en dos etapas.

Etapa 1: Asignación óptima del trabajo

En esta etapa, tomando como dados los niveles de capital instalado, el planificador social elige la cantidad óptima de trabajo en cada ciudad. Este problema es estático y se reduce a maximizar la producción nacional. Es decir,

$$\begin{aligned}&\max\left\{Y^A+Y^B\right\}\\&\sum_{j=A,B} N^j = N\\&Y^j=(N^j)^\alpha (K^j)^\beta, \forall j=A,B\\&K^j \text{ dado}, \forall j=A,B\end{aligned}$$

La solución de este problema es

$$\frac{N^A}{N^B}=\left(\frac{k^A}{k^B}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \tag{5}$$

donde $k^j \equiv \frac{K^j}{N}, j=A,B$ representa el stock de capital per cápita instalado en la ciudad *j*.

De forma similar se definen las siguientes variables per cápita: $y^j \equiv \frac{Y^j}{N}, i^j \equiv \frac{I^j}{N}$. Sustituyendo esta asignación óptima en la función de producción agregada del país, se obtiene la siguiente función de valor:

$$f \equiv \sum_{j=A,B} y^j (N^{j*}) = \Omega^{1-\alpha}$$

donde la población nacional ha sido normalizada a 1 y $\Omega \equiv \sum_{j=A,B} (k^j)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$. Se define el producto marginal del capital en la ciudad *j* como

$$f_j \equiv \frac{\partial f}{\partial k^j} = \beta \Omega^{-\alpha} (k^j)^{\frac{\beta}{1-\alpha}-1} \tag{6}$$

Etapa 2: Asignación óptima del capital

En esta etapa del problema, el capital es asignado entre ciudades y a lo largo del tiempo, de forma que se maximiza el valor presente de la utilidad. Este problema dinámico se puede escribir en términos per cápita como sigue:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln(c) dt$$
$$\sum_{j=A,B} i^j + \sum_{j=A,B} g(k^j) + c = f(k^A, k^B)$$
$$\dot{k}^j = i^j - \delta k^j, \forall j = A,B$$
$$i^j \geq 0, \forall j = A,B$$
$$k_0^{\ j} \text{ dado, } \forall j = A,B$$

Nótese que la función de valor obtenida en la etapa 1 se utiliza aquí en la parte derecha de la restricción de recursos. El Hamiltoniano de este problema es

$$H = e^{-\rho t} \ln c + \lambda \left[f - \sum_{j=A,B} i^j - \sum_{j=A,B} g(k^j) - c \right] + \sum_{j=A,B} \mu^j \left[i^j - \delta k^j \right]$$

donde λ, μ^j, $j = A,B$ son multiplicadores de Lagrange. Este problema tiene tres variables de control (c, i^A, i^B) y dos variables de estado (k^A, k^B). Las condiciones de primer orden para la ciudad j son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho t} \frac{1}{c} = \lambda \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial i^j} \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda + \mu^j \leq 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k^j} = -\dot{\mu}_j \Leftrightarrow \lambda \left[f_j - g'(k^j) \right] - \mu^j \delta = -\dot{\mu}^j \tag{9}$$

y la condición de transversalidad es

$$\lim_{t\to\infty} k_t^{\,j}\mu_t^{\,j} = 0 \tag{10}$$

Como en el problema descentralizado, es claro que, debido a la presencia de rendimientos crecientes de escala, el capital es más productivo en la mayor ciudad, es decir $f_A > f_B$, $\forall k^A > k^B > 0$.

Los supuestos 1-3 del problema descentralizado se asumen también aquí. Las únicas dos diferencias son que, en primer lugar, el período de convergencia $\hat{t}$ es diferente del que se define en el equilibrio competitivo. En segundo lugar, como se muestra seguidamente, el producto marginal bruto en la ciudad j es diferente en los dos problemas.

Como sucedía en el modelo competitivo, dependiendo de los parámetros del modelo, el estado estacionario de la economía puede estar caracterizado por una distribución degenerada del tamaño de ciudad, donde todas las ciudades tienen los mismos niveles de población y capital (el caso de convergencia) o por una estructura con ciudades de diferente tamaño (el caso de no convergencia). La evolución cualitativa de la economía se muestra, como en el escenario con mercados competitivos, en los gráficos 3-6.

Equivalencia entre los dos problemas

Para hacer los dos problemas comparables, es necesario asumir que $\beta = \psi - \alpha + 1$. Puesto que en el problema del planificador, el parámetro β se restringe a tomar valores entre 0 y 1, esto implica la siguiente restricción en el parámetro de la externalidad ψ.

$$0 < \psi < \alpha$$

En el equilibrio competitivo, la presencia de una externalidad positiva del capital medio de una ciudad en cada una de las empresas que operan en ella implica una tasa de inversión subóptima en cada momento del tiempo. Esta tasa de inversión baja genera dos tipos de ineficiencia en la economía. La primera es la ineficiencia estándar a la Romer (1986). Esto puede verse claramente en las expresiones del producto marginal del capital [ecuaciones (3) y

(6)]. Puesto que $1-\alpha < \beta$, las empresas invierten demasiado poco en la economía descentralizada, lo que implica una tasa de crecimiento demasiado baja.

La segunda ineficiencia tiene que ver con los costes de congestión. Puesto que estos costes son convexos, es óptimo construir ciudades de tamaño similar. En el caso de no convergencia, está claro que $\left(\frac{k^A}{k^B}\right)^{mercado} > \left(\frac{k^A}{k^B}\right)^{planificador}$, mientras que en el caso de convergencia, el ratio del mercado es estrictamente superior al del planificador durante al menos un período.

DEMOSTRACIONES

Proposición 1: $f_A > f_B$, $\forall k^A > k^B > 0$

Demostración: $f_A > f_B$ implica

$$(k^A)^{\frac{\beta}{1-\alpha}-1} > (k^B)^{\frac{\beta}{1-\alpha}-1}$$

Es decir,

$$\left(\frac{k^A}{k^B}\right)^{\frac{\psi}{1-\alpha}} > 1$$

Esto es cierto siempre que $k^A > k^B > 0$, ya que los rendimientos crecientes de escala implican $\psi > 0$ *Q.E.D.*

Proposición 2: La tasa de crecimiento del consumo per cápita viene dado por

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \begin{cases} \tilde{f}_A - \rho - \delta, \forall t \in (0, \hat{t}] \\ \tilde{f}_j - \rho - \delta, \forall t \in (\hat{t}, t^*], \forall j = A, B \\ 0, \forall t > t^* \end{cases}$$

Demostración: Reescríbase el problema de la familia como:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln(c) dt$$

$$\sum_{j=A,B} i^j + c = \omega + \sum_{j=A,B} r^j z^j$$

$$\dot{z}^j = i^j, \forall j = A, B$$

$$i^j \geq 0, \forall j = A, B$$

$$z_0{}^j \text{ dado, } \forall j = A, B$$

donde i^j representa la tasa neta de inversión en el activo j. El Hamiltoniano de este problema es

$$H = e^{-\rho t} \ln c + \upsilon \left[\omega + \sum_{j=A,B} r^j z^j - c - \sum_{j=A,B} i^j \right] + \sum_{j=A,B} \theta^j i^j$$

Donde v y θ^j, $j = A,B$ son multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de primer orden vienen dadas por

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho t} \frac{1}{c} = \lambda \tag{11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial i^j} \leq 0 \Leftrightarrow -\upsilon + \theta^j \leq 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z^j} = -\dot{\theta}^j \Leftrightarrow \upsilon r^j = -\dot{\theta}^j \tag{13}$$

Supóngase que, en el intervalo de tiempo $(0, \hat{t}]$, $i^B > i^A = 0$. Esto implica que $v = \theta^B$ y, por lo tanto, de (13)

$$\frac{\dot{\upsilon}}{\upsilon} = \delta - \tilde{f}_B \tag{14}$$

Tomando logaritmos y derivadas en (11)

$$-\rho - \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\upsilon}}{\upsilon} \tag{15}$$

Si se igualan (14) y (15) se obtiene

$$\gamma_c = \tilde{f}_B - \rho - \delta$$

Como en ese intervalo de tiempo $\tilde{f}_B < \tilde{f}_A$ esta política de inversión no puede ser óptima para los consumidores. La misma lógica implica que cualquier tasa de inversión positiva en la ciudad *B* durante este intervalo es subóptima. En el intervalo de tiempo $(\hat{t}, t^*]$ los dos productos marginales netos del capital se igualan y, por tanto, la tasa de crecimiento del consumo viene dada por

$$\gamma_c = \tilde{f}_j - \rho - \delta, \forall j = A, B$$

ya que la inversión neta es estrictamente positiva en ambas ciudades. Finalmente, en cualquier período $t > t^*$, el consumo es constante, ya que la economía ha alcanzado su estado estacionario.